Statistik

TEIL 6

Hans-Hermann Thulke
ba @ thulke-statistics.de
0172-3449934

Statistik

- Daten erheben, verstehen, werten
- Hypothesen prüfen
- Modellieren von Zusammenhängen

thulke.statistics – leipzig – 0172-3449934 – ba @ thulke-statistics.de

Grundgesamtheit + Stichprobe

Wahrscheinlichkeit

Datentypen, Merkmalsskalen

Häufigkeits- & Punktediagramm

Lagemaße & Streuungsmaße

Box-Whisker-Plot

Verteilungen

Stichprobenverteilung

Konfidenzinterval

thulke.statistics – leipzig – 0172-3449934 – ba @ thulke-statistics.de

Statistik

- Daten erheben, verstehen, werten
- Hypothesen prüfen
- Modellieren von Zusammenhängen

Erinnern an…

Wahrscheinlichkeit

Verschiedene Prüfer…

T2

Ungenügend waren
25 von 100
75%

T1

Ungenügend waren
7 von 100
93%

T3

Ungenügend waren
1 von 100
99%

Soll Qualität 97%

Test: Wie wahrscheinlich ist Stichprobenergebnis unter Annahme von H0?

Behauptung = Nullhypothese = H0

Prüfen der Qualität durch 3 MA je mit Stichprobe vom Umfang 100?

T2

T1

T3

Alle behaupten:

+ „naja“

Qualität erreicht!

…plausibel???

“Plausibel” wird verworfen (H0 abgelehnt) wenn Stichprobenergebnis z.B. weniger als 5% wahrscheinlich ist

Daten erheben, verstehen, werten

thulke.statistics – leipzig – 0172-3449934 – ab@thulke-statistics.de

Erinnern an… Wahrscheinlichkeit

Verschiedene Prüfer…

T2	T1	T3
Ungenügend waren 25 von 100 75%	Ungenügend waren 7 von 100 93%	Ungenügend waren 1 von 100 99%

⇒ Aber wie groß müssen Werte sein, dass ihr Zustandekommen unter H_0 extrem unwahrscheinlich ist?

Was ist „extrem unwahrscheinlich"?

→ üblich: 0.01, 0.05, 0.1

→ Signifikanzniveau α

Soll Qualität 97% = H0

⇒ Konstruktion des sogenannten Ablehnungsbereichs, der alle Werte enthält,

- die für H_1 sprechen
- deren Wahrscheinlichkeit insgesamt $\leq \alpha$

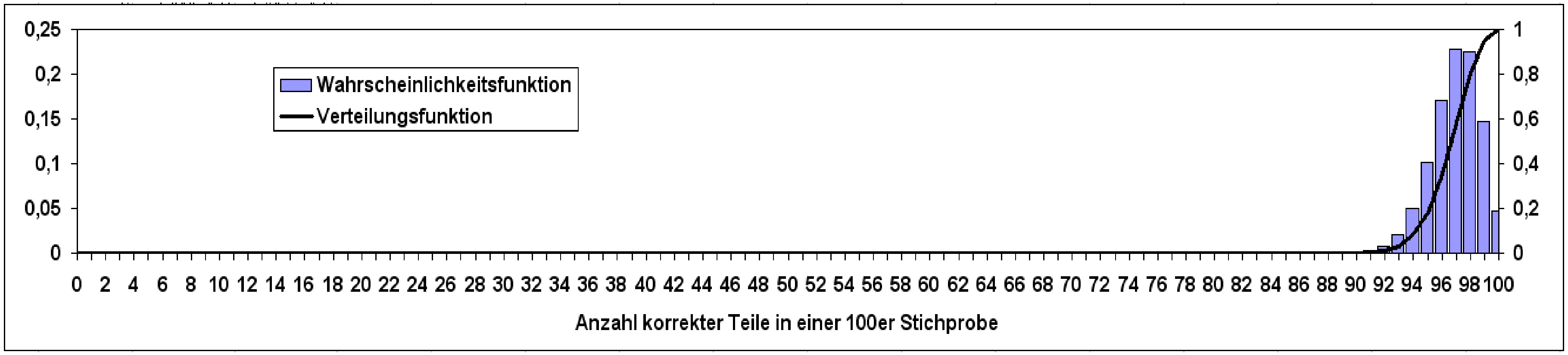
thulke.statistics – leipzig – 0172-3449934 – ab@thulke-statistics.de

Hypothesentests

<u>Unter H0</u> ist X ~ Binomial (n; p) und hier mit <u>n=100</u> und <u>p=0.97</u>

H0: $p \geq 0.97$ (Behauptung)

HA: $p < 0.97$ (Alternative wenn Behauptung abgelehnt wird)



Unter H0, d.h. p ist (mindestens) 0.97, gilt:

$P(0 \leq X \leq 93$ d.h. $\underline{X \leq 93}) = 0{,}031$ bzw. $P(\underline{X \leq 94}) = 0{,}081$

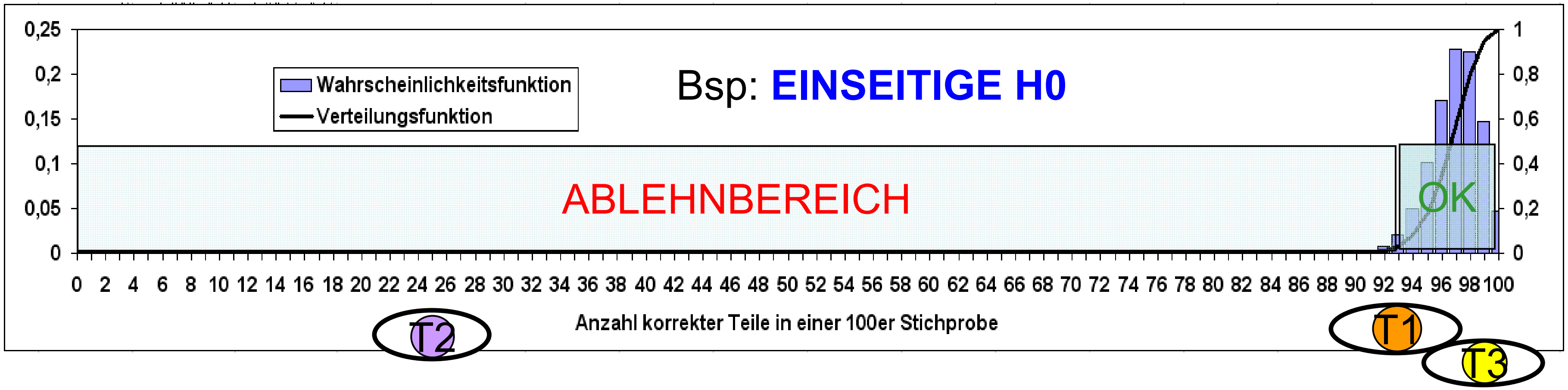
Wenn man also ein Stichprobenergebnis von weniger als 94 korrekter Teile erhält, wäre dies unter H0 weniger als 5% wahrscheinlich. Da uns dies zu gering ist, muss H0 abgelehnt werden. Damit ist die Qualität der Charge, bei 5% möglichem Irrtum, geringer als die Normqualität von 97%.

Hypothesentests

<u>Unter H0</u> ist X ~ Binomial (n; p) und hier mit <u>n=100</u> und <u>p=0.97</u>

H0: p ≥ 0.97 (Behauptung)

HA: p < 0.97 (Alternative wenn Behauptung abgelehnt wird)



Unter H0, d.h. p ist (mindestens) 0.97, gilt:

P(0 ≤ X ≤ 93 d.h. <u>X ≤ 93</u>) = 0,031 bzw. P(<u>X ≤ 94</u>) = 0,081

Wenn man also ein Stichprobenergebnis von weniger als 94 korrekter Teile erhält, wäre dies unter H0 weniger als 5% wahrscheinlich. Da uns dies zu gering ist, muss H0 abgelehnt werden. Damit ist die Qualität der Charge, bei 5% möglichem Irrtum, geringer als die Normqualität von 97%.

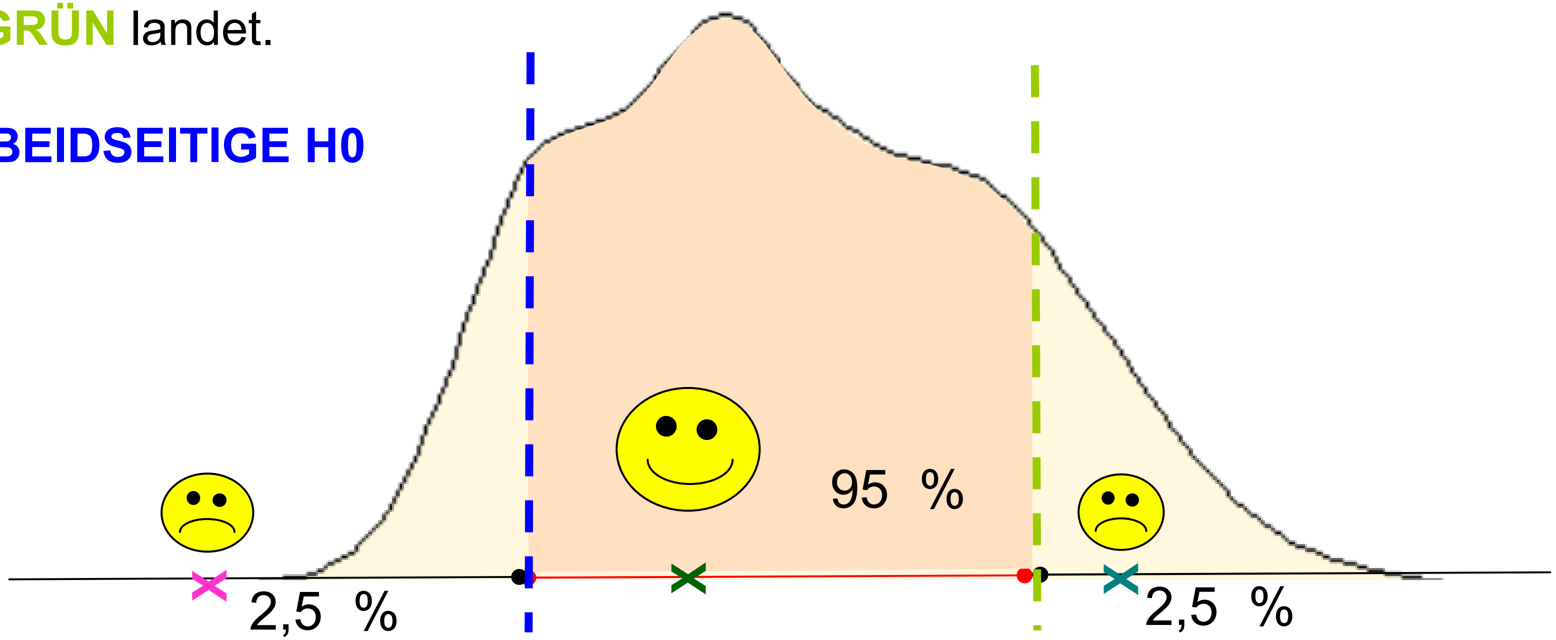
Verschieden für verschiedene Testprobleme !!!

Hypothesentests

ROT **<u>Wahrscheinlichkeitsfunktion des Stichprobenergebnisses</u>** (z.B. ein Anteil, oder ein Mittelwert oder…) wenn die **Nullhypothese** zuträfe („H0“).

Akzeptiere die Gültigkeit von H0 solange die Wahrscheinlichkeit zufällig den **tatsächlich gemessenen** Wert (oder einen noch weiter nach **rechts** oder **links** abweichenden) zu beobachten, größer ist („plausibler ist“) als die vereinbarte Ablehnwahrscheinlichkeit (z.B. bei 5%). D.h. die in H0 getroffene Annahme wird als plausibel betrachtet, solange das Stichprobenergebnis innerhalb von **BLAU** und **GRÜN** landet.

Bsp: **BEIDSEITIGE H0**



Hypothesentests

ROT **<u>Wahrscheinlichkeitsfunktion des Stichprobenergebnisses</u>** für den **<u>Mittelwert einer Verteilung</u>** wenn die **Nullhypothese** zuträfe, d.h. der behauptete Mittelwert μ der Verteilung gerade – – – ist.

Akzeptiere die Gültigkeit von H0 solange die Wahrscheinlichkeit zufällig den **tatsächlich gemessenen** Mittelwert $\overline{x}$ zu beobachten (oder einen noch weiter nach **rechts** oder **links** abweichenden Wert), größer ist („plausibler ist“) als die vereinbarte Ablehnwahrscheinlichkeit (z.B. bei 5%). D.h. die in H0 getroffene Annahme der Mittelwert der Grundgesamtheit sei μ, wird als plausibel betrachtet, solange der Stichprobenmittelwert innerhalb von **BLAU** und **GRÜN** landet.

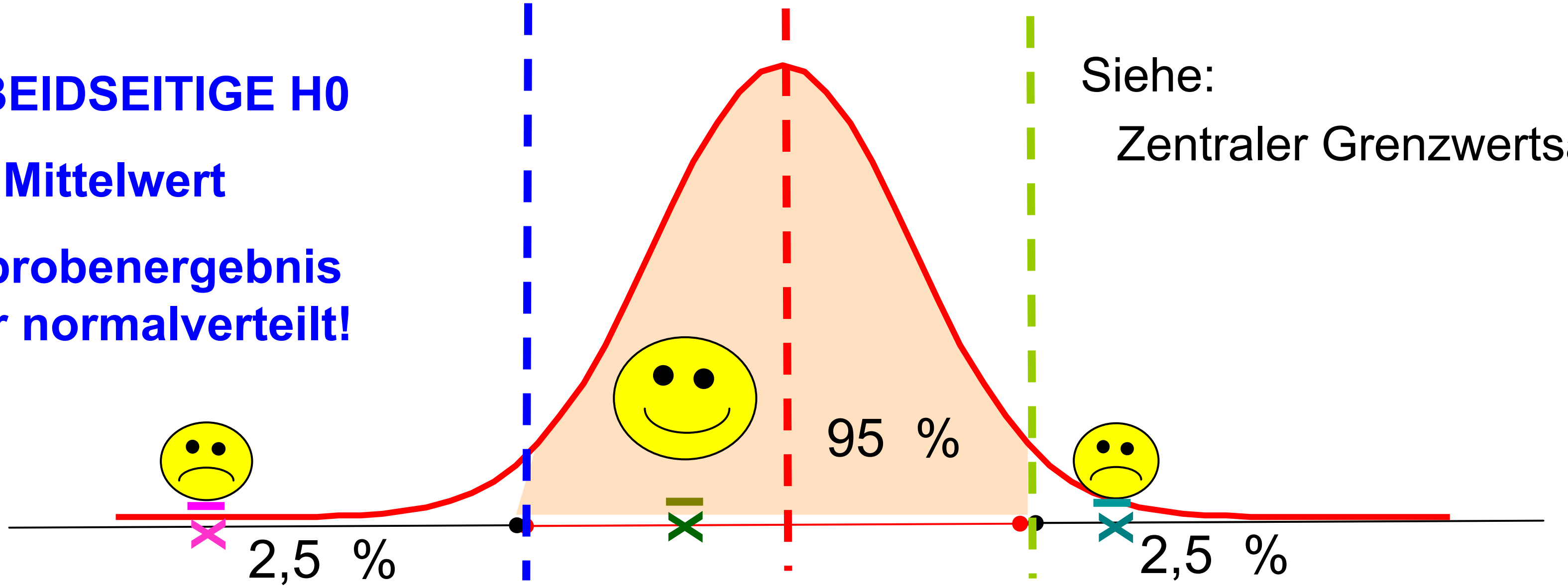
Bsp: **BEIDSEITIGE H0**

Spez. Mittelwert

Stichprobenergebnis immer normalverteilt!

Siehe:

Zentraler Grenzwertsatz



Hier speziell: - 1,96 * s/√n μ 1,96 * s/√n

Hypothesen prüfen

thulke.statistics – leipzig – 0172-3449934 – ba @ thulke-statistics.de

Testsablauf

1. Fragestellung & Modell formulieren
2. **Aufstellen von H0 und HA**
3. **Irrtumswahrscheinlichkeit** festlegen
4. **Prüfgröße** heraussuchen
   - Voraussetzungen prüfen (Ziel des Tests; Merkmalsskala; Stichprobenumfang; Unabhängigkeitsannahme)
5. Wert für die Grenze(n) des **Annahmebereich** ablesen
6. Stichprobe **erheben**
7. Berechnen der Prüfgröße (Lage im Ablehn- oder Annahmebereich?)
8. **Testentscheidung**
9. Interpretation (**p-Wert** angeben)

thulke.statistics – leipzig – 0172-3449934 – ba @ thulke-statistics.de

Tests im Überblick

Vergleich eines Stichprobenmittelwerts mit einem **Vorgabewert μ**
→ σ_x bekannt → $z = (\bar{x}-\mu) / \sigma_{\bar{x}}$
→ $\hat{\sigma}_x$ geschätzt → $t = (\bar{x}-\mu) / \hat{\sigma}_{\bar{x}}$, $df = n-1$

Vergleich von 2 Stichproben hins. Mittelwert oder zentraler Tendenz
→ unabhängige Daten
→ intervallskaliert normalverteilt → t-Test für unabhängige Stichproben
→ ordinalskaliert beliebig verteilt → U-Test
→ abhängige Daten
→ intervallskaliert normalverteilt → t-Test für abhängige Stichproben
→ ordinalskaliert beliebig verteilt → Wilcoxon-Test

Teststatistiken…(Bsp.)

Vergleich **zweier Merkmale** bzgl. ihres **Mittelwerts** – gewünscht wird das deren Differenz D verschieden von einem gegebenen Wert μ (z.B. Null) ist.

Dafür werden die beobachteten Daten gegen Nullhypothese, z.B. μ=0, getestet.

Wenn beide Merkmal die gleiche unbekannte Varianz σ² haben, ist für die folgende zufällige (hängt ja von der SP ab) (Prüf-)Größe bekannt, dass sie nach der t-Verteilung mit n_1+n_2-2 FG verteilt ist (dh. Stichprobenverteilungsfunktion bekannt).

$$T = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \mu}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \cdot \frac{(n_1 - 1)\cdot \hat{\sigma}_1^2 + (n_2 - 1)\cdot \hat{\sigma}_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}}$$

mit n_1+n_2-2 Freiheits-graden

Für die zweiseitige Frage (s. Visualisierung 3 Folien zurück) liegt der 95%-Annahmebereich zwischen zwei Werten auf der T-Achse (d.h. den entsprechenden Quantilen der t-Verteilung): $-t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)$ und $+t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)$. Oder anders herum, die Nullhypothese „kann“ verworfen werden, wenn das berechnete $|T| > t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)$

…im Überblick

Siehe Formelsammlung!

Teststatistiken…Merken

Zum Hypothesenpaar H0/HA sollte ein Test existieren – sonst muss eine Prüfgröße und deren Prüfverteilung mathematisch hergeleitet werden!

Bei Testauswahl nicht nur Fragestellung vergleichen, sondern auch die zum Test angeführten Voraussetzungen prüfen!

Prüfgröße = Teststatistik
Speziell für jeden Test

$$T = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \mu}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \cdot \frac{(n_1 - 1)\cdot\hat{\sigma}_1^2 + (n_2 - 1)\cdot\hat{\sigma}_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}}$$

mit n_1+n_2-2 Freiheits-graden

Zu konkreter Stichprobe, Wert der Prüfgröße = Teststatistik berechnet (d.h. ist zufällig)

Prüfverteilung - eine der vorgestellten theoretischen Verteilungen (meistens)

t-Verteilung

Das 1-α bzw. 1-α/2 Quantil der Prüfverteilung entspricht dem Grenzwert der zu einer Stichprobe berechneten Prüfgröße, bei dem – **ANGENOMMEN H0 ist GÜLTIG** – die Stichprobe noch als Zufallsprodukt plausibel ist.
(d.h. „NICHT mehr zufällig“ ist tabelliert)

Zu den Wert der PG kann man den exakten Wert der Prüfverteilung berechnen (Verteilungsfunktion). Dieser ist eine WS und WS (bzw. 1-WS) gibt an, wie wahrscheinlich (plausibel) die gezogenen Stichprobe unter H0 ist – dies nennt man den **p-Wert** (vgl. Ausgaben von Statistikprogrammen).

Teststatistiken…Merken

Entscheidung (zum Signifikanzniveau α; mit Irrtumswahrscheinlichkeit α)
d.h. **H0 ist abzulehnen, wenn**:

(weil dann die Stichprobe unter H0 höchstens mit der Wahrscheinlichkeit α auftritt)

1. Berechnete Prüfgröße **>** 1-α bzw. 1- α /2 Quantil der Prüfverteilung

z.B. wenn nur Tabellen zur Hand sind

2. Berechnete p-Wert **<** 1-α bzw. 1- α /2

z.B. Ausgabe von Statistikprogrammen (incl. EXCEL)

Statistik

- Daten erheben, verstehen, werten
- Hypothesen prüfen
- Modellieren von Zusammenhängen

thulke.statistics – leipzig – 0172-3449934 – ba @ thulke-statistics.de